球関数の新谷liftingについて(代数的組合せ論)

川中, 宣明

数理解析研究所講究録
768巻 1991年 93-102

球関数の新谷 lifting について

阪大・理 川中宣明 (Noriaki Kawanaka)

§1. 新谷 lifting

Gを有限群,

$$\sigma : g \longrightarrow {}^{\sigma}g \quad , \quad g \in G$$

を, Gの自己同型とする. Gのσによる不動点の全体をG_σ, Gと$\langle\sigma\rangle$の半直積$G\langle\sigma\rangle$を$\tilde{G}$と書く. mをσの位数として, "ノルム写像"

$$\mathbf{N} : \quad G \longrightarrow G$$

を

$$\mathbf{N}(g) = (g\sigma)^m = g \cdot {}^{\sigma}g \cdot {}^{\sigma^2}g \cdots {}^{\sigma^{m-1}}g \quad , \quad g \in G$$

によって定義する. Gが可換なら$\mathbf{N}(g) \in G_\sigma$となるが一般には, $\mathbf{N}(g)$を含むGの共役類${}^{G}\mathbf{N}(g)$がσで保たれる, という程度のことしか成り立たない. 次の条件(S)を考える.

<u>条件(S)</u> 任意の$g \in G$に対して${}^{G}\mathbf{N}(g) \cap G_\sigma$は$G_\sigma$のひとつの共役類である.

さて，　$R: G \longrightarrow GL(W)$　を　G の複素既約表現とすると，　${}^{\sigma}R = R \circ \sigma^{-1}$　も　Gの既約表現である．いま　${}^{\sigma}R \sim R$　と仮定すれば，$\tilde{G}$ の既約表現

$$\tilde{R}: \tilde{G} \longrightarrow GL(W)$$

で　$\tilde{R}|G = R$　であるものが（同値を除いて n 個）存在する．条件(S) のもとで，次のように定義する．

<u>定義</u>（新谷）　G_σ の既約表現　$Q: G_\sigma \longrightarrow GL(V)$　が，Gの既約表現 R で ${}^{\sigma}R \sim R$　となるものに，"持ち上がる" とは，

$$\mathrm{trace}\ \tilde{R}(g\sigma) = \varepsilon\ \mathrm{trace}\ Q\ (n(g))$$

が　すべての　$g \in G$　に対して成立することである．ここに　ε は　$\varepsilon^m = 1$ を満たす複素数で　g には関係しない，　また　$n(g)$ は　${}^{G}N(g) \cap G_\sigma$　の任意の元である．

条件(S) が満たされ，　G_σ　の任意の既約表現が，Gの既約表現へ持ち上がる場合として，例えば，次の２つが知られている．

<u>Case (G)</u>　$(|G|, m) = 1$ の場合．

（1968　G. Glauberman ［1］の結果。Glauberman

自身の formulation は，上と少しだけ異なる。）

<u>Case (S)</u>　$G = GL_n(\mathbb{F}_{q^m})$　（$\mathbb{F}_q$ = 元数 q の有限体），

$\langle \sigma \rangle = Gal(\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q)$ の場合．

（新谷卓郎 1976。[2] 土井，長沼両氏による保型形式，

および対応する Dirichlet 級数の持ち上げについての

結果を発展させた斉藤裕氏の仕事 [5] の本質を，新

谷氏は，局所体・アデール環上の reductive 群の表

現の持ち上げという形で定式化した [3], [4]。上記

1976 年の論文は，有限体上でも同様のことが成立

することを示したもの。）

良く知られているように，対称空間上の球関数，あるいは，Hecke 環の指標は，群の既約指標の概念の一般化と考えることができる。そこで，"球関数の新谷 lifting" とは何か？という問題を考えてみたい。

§2. Hecke 環　$\mathcal{H}(H\backslash G/K)$

有限群の Hecke 環とその表現の一般論については，Curtis, Reiner の本 [6] の第1巻，§11D があるが，ここでは，そこの結果を，もう少し一般化しておく。

G を有限群，H と K をその部分群とする。G の群環

$\mathbb{C}G$のべき等元 $e_H = |H|^{-1}\sum_{h\in H} h$, $e_K = |K|^{-1}\sum_{k\in K}$ を用いて

$$\mathcal{H}(H\backslash G/K) = e_H \mathbb{C}G e_K \ (\subset \mathbb{C}G)$$

とおく。明きらかに $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ は, $\mathbb{C}G$ の部分環である。Curtis-Reiner の本の Hecke 環は $H=K$ の特別の場合である。$\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ は, また, 左から $\mathcal{H}(H\backslash G/H)$ が, 右から $\mathcal{H}(K\backslash G/K)$ が作用する加群とみることもできる。"Hecke 環" $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ およびその表現の一般論について, 次のことがわかる。

1° $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ は, 半単純とは限らない。また, 単位元を持つとは限らない。

2° $\{x_i \mid i\in I\}$ を $H\backslash G/K$ の完全代表系とすると,

$$[x_i] = \frac{|HK|}{|x_i^{-1}Hx_i \cap K|} e_H x_i e_K \quad , \quad i \in I$$

は, $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ の基底をなし, その構造定数 $\in \mathbb{Z}$ となる.

3° $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ のすべての既約指標は, $\mathbb{C}G$ の既約指標の $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ への制限として得られる. また, $\mathbb{C}G$ の相異なる既約指標 χ_1, χ_2 に対して,

$$\chi_i|\mathcal{H}(H\backslash G/K) \neq 0,\ i=1,2 \Rightarrow \chi_1|\mathcal{H}(H\backslash G/K) \neq \chi_2|\mathcal{H}(H\backslash G/K)$$

4° $\mathbb{C}G$ の既約指標 χ, χ' に対して

$$\chi(1)|G|^{-1}\sum_{i\in I}|Hx_iK|\,\chi(e_Hx_ie_K)\overline{\chi'(e_Hx_ie_K)} = \begin{cases} 0 & \chi \neq \chi' \\ \chi(e_He_K) & \chi = \chi' \end{cases}.$$

5° $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ が半単純($\Leftrightarrow$ べき零な両側イデアルは$\{0\}$)かつ可換たなるための必要十分条件は，

$\langle \chi, 1_H^G\rangle \neq 0$，$\langle \chi, 1_K^G\rangle \neq 0$ となるGの任意の既約指標χに対し，$\langle \chi, 1_H^G\rangle = \langle \chi, 1_K^G\rangle = 1$ と $\chi(e_He_K)\neq 0$ が成り立つことである．

<u>定義</u> $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ の元 $\varphi \neq 0$ が $H\backslash G/K$ 上の球関数であるとは，任意の $f\in\mathcal{H}(H\backslash G/H)$ と任意の $g\in\mathcal{H}(K\backslash G/K)$ に対して

$$f\cdot\varphi = c_\varphi(f)\,\varphi \qquad \exists\, c_\varphi(f)\in\mathbb{C}$$
$$\varphi\cdot g^* = d_\varphi(g)\,\varphi \qquad \exists\, d_\varphi(g)\in\mathbb{C}$$

であること．ここに，$*$ は $\mathcal{H}(K\backslash G/K)$ の標準的な反自己同型である．

このとき $f\longrightarrow c_\varphi(f)$，$g\longrightarrow d_\varphi(g)$ は，それぞれ $\mathcal{H}(H\backslash G/H)$，$\mathcal{H}(K\backslash G/K)$ の1次元表現となる．

とくに $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ が半単純，可換である場合，G の既約指標 χ で，$\chi(e_He_K)\neq 0$ を満たすものに対して，

$$\varphi_\chi = \sum_{i\in I}|Hx_iK|\,\overline{\chi(e_Hx_ie_K)}\,e_Hx_ie_K$$

は $H\backslash G/K$ 上の球関数である．逆に，$H\backslash G/K$ 上のすべての球関数は φ_χ の定数倍で，$\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ は，φ_χ 達で張られる．

また，
$$\frac{c_{\varphi_\chi}(e_H \times e_H)}{d_{\varphi_\chi}(e_K \times e_K)} = \frac{\chi(e_H \times e_H)}{\chi(e_K \times e_K)}, \quad x \in G$$
である．

§3　$\mathcal{H}(\Delta G\backslash G\times G/\Delta_\sigma G)$ について

G を有限群とし，σ をその自己同型とする．直積群 $G\times G$ の部分群として，次の2つを考える．

$$\Delta G = \{(x,x) \mid x \in G\} \quad : \text{対角部分群}$$
$$\Delta_\sigma G = \{({}^\sigma x, x) \mid x \in G\} \quad : \sigma \text{でひねった対角部分群}$$

このとき，$\mathcal{H}(\Delta G\backslash G\times G/\Delta_\sigma G)$ は，可換．一般には半単純とは限らないが，例えば，§1 の Case (G)，Case (S) の場合は半単純である．$G\times G$ の既約指標 ψ が，
$$\langle 1_{\Delta_\sigma G}^{G\times G}, \psi \rangle \neq 0, \quad \langle 1_{\Delta G}^{G\times G}, \psi \rangle \neq 0$$
となるための必要十分条件は，それが
$$\psi = \chi \otimes \bar{\chi}, \quad \chi \text{ は } {}^\sigma\chi = \chi \text{ をみたす } G \text{ の既約指標}$$
と書けることである．また，このとき
$$(\chi\otimes\bar{\chi})(e_{\Delta G}(g,1)e_{\Delta_\sigma G}) = \frac{\tilde{\chi}(\sigma^{-1})\tilde{\chi}(g\sigma)}{\chi(1)^2}$$

が成り立つ．ただし，$\tilde{\chi}$ は §1 の $\tilde{R}$ の指標である．$\sigma = id.$ のときは，良く知られた式

$$(\chi \otimes \bar{\chi})(e_{\Delta G}(g,1)e_{\Delta G}) = \frac{\chi(g)}{\chi(1)}$$

になる．これらの式と Glauberman 1968，新谷 1976 の結果をあわせると，Case (G)，Case (S) の場合は，

$$\Delta(G_\sigma)\backslash G_\sigma \times G_\sigma / \Delta(G_\sigma) \text{ 上の球関数}$$

と

$$\Delta G \backslash G \times G / \Delta_\sigma G \text{ 上の球関数}$$

とが，ノルム写像による対応を通して同一視できることがわかる．これは，Glauberman や新谷の結果の球関数的な言い換えである．次節で単なる言い換えでないような例を示す．

§4 $\mathcal{H}(Sp_{2n}(\mathbb{F}_{q^2})\backslash GL_{2n}(\mathbb{F}_{q^2})/U_{2n}(\mathbb{F}_q))$ など

G を有限群，$\jmath$ と τ をその自己同型で

$$\jmath^2 = \tau^2 = id. \quad \jmath\tau = \tau\jmath$$

を満たすものとする．次の2つの両側剰余類集合を考える．

$$G_\jmath \backslash G / G_{\jmath\tau}, \quad (G_\tau)_\jmath \backslash G_\tau / (G_\tau)_\jmath$$

$$\alpha_\jmath : G \longrightarrow G \quad (x \longrightarrow {}^{\jmath}x^{-1}x)$$

という写像を考えると，次のことが成り立つ．

- $g, h \in G$ に対して $G_j\, g\, G_{j\tau} = G_j\, h\, G_{j\tau}$

  $\Longleftrightarrow \quad \alpha_j(g) = {}^{\tau}x^{-1}\, \alpha_j(h)\, x \quad (\exists\, x \in G_{j\tau})$

- $g, h \in G_\tau$ に対して $(G_\tau)_j\, g\, (G_\tau)_j = (G_\tau)_j\, h\, (G_\tau)_j$

  $\Longleftrightarrow \quad \alpha_j(g) = x^{-1}\, \alpha_j(h)\, x \quad (\exists\, x \in (G_\tau)_j)$

よって，

$G_j \backslash G / G_{j\tau} \overset{\sim}{\longleftrightarrow}$ $\alpha_j(G)$ の $G_{j\tau}$ の元による τ-共役類

$(G_\tau)_j \backslash G_\tau / (G_\tau)_j \overset{\sim}{\longleftrightarrow}$ $\alpha_j(G_\tau)$ の $(G_\tau)_j$ の元による共役類

これから後は次の2つの場合だけを考える．

Case(G′) $|G|$ が odd

Case(S′) $G = GL_{2n}(\mathbb{F}_{q^2})$, $\langle \tau \rangle = Gal(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$

$j : g \longrightarrow J^{-1}\, {}^t g^{-1} J$, $J = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix}$

（このとき，$G_j = Sp_{2n}(\mathbb{F}_{q^2})$, $G_{j\tau} \cong U_{2n}(\mathbb{F}_q)$ ユニタリ群

$G_\tau = GL_{2n}(\mathbb{F}_q)$

$(G_\tau)_j = Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$ ）

この場合，任意の $g \in G$ に対し

$${}^{G_{j\tau}}\left(\alpha_j(g)\, {}^{\tau}\alpha_j(g)\right) \cap G_\tau$$

は，$\alpha_j(G_\tau)$ の $(G_\tau)_j$ の元によるひとつの共役類になること，従って，$(G_\tau)_j \backslash G_\tau / (G_\tau)_j$ のひとつの元を決めることが，わかる．さらに，この対応により

$$G_\delta \backslash G / G_{\tau_\delta} \quad \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \quad (G_\tau)_\delta \backslash G_\tau / (G_\tau)_\delta$$

となり，

$$G_\delta\, g\, G_{\tau_\delta} \quad \longleftrightarrow \quad (G_\tau)_\delta\, x\, (G_\tau)_\delta\,, \qquad \begin{matrix} g \in G \\ x \in G_\tau \end{matrix}$$

のとき

$$\frac{|G_\delta\, g\, G_{\tau_\delta}|}{|G_\delta|\,|G_{\tau_\delta}|} = \frac{|(G_\tau)_\delta\, x\, (G_\tau)_\delta|}{|(G_\tau)_\delta|^2}$$

となることもわかる．これらのことを用いて，次のことが証明できる．

定理　Case (G')，Case (S') のとき，$\mathcal{H}(G_\delta \backslash G / G_{\tau_\delta})$ は，可換，半単純で，$G_\delta \backslash G / G_{\tau_\delta}$ 上の球関数と $(G_\tau)_\delta \backslash G_\tau / (G_\tau)_\delta$ 上の球関数とは，上の対応を通して同一視できる．

注意　Case (S') のとき，

$$(G_\tau)_\delta \backslash G_\tau / (G_\tau)_\delta = Sp_{2n}(\mathbb{F}_q) \backslash GL_{2n}(\mathbb{F}_q) / Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$$

上の球関数は，〔7〕で求められている．

文　献

〔1〕 G. Glauberman : Correspondences of characters for relatively prime operator groups, Canad. J. Math. 20 (1968), 1465 − 1488.

〔2〕 T. Shintani : Two remarks on irreducible characters of finite general linear groups, J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 396 – 414.

[3] T. Shintani : On irreducible unitary characters of a certain group extension of $GL(2,\mathbb{C})$, J. Math. Soc. Japan 29 (1977), 165 – 188.

[4] T. Shintani : On liftings of holomorphic cusp forms, Proc. Symp. Pure Math. 33, Part 2, Providence (1979), 79 – 110.

[5] H. Saito : Automorphic Forms and Algebraic Extensions of Number Fields, Lecture Notes in Math., Kyoto Univ. 1975

[6] C.W. Curtis, I. Reiner : Methods of Representation Theory, Vol 1, Wiley - Interscience, 1981.

[7] E. Bannai, N. Kawanaka, S-Y. Song : The character table of the Hecke algebra $\mathcal{H}(GL_{2n}(\mathbb{F}_q), Sp_{2n}(\mathbb{F}_q))$, J. Alg. 129 (1990), 320 – 366.